

Zur Modellierung und Simulation von Turbulenz*

MANFRED KRAFCZYK

Institut für rechnergestützte Modellierung im Bauingenieurwesen (iRMB)
TU Braunschweig, Pockelsstraße 3, D-38106 Braunschweig

Das Verständnis von Strömungen gasförmiger oder flüssiger Medien ist von überragender Bedeutung zum Verständnis und der Vorhersage komplexer Problemstellungen in einer Vielzahl von Disziplinen. Hier seien ohne Anspruch auf Vollständigkeit beispielhaft genannt:

- Umwelt (Gewässer, Atmosphäre, Klima, Erdmantel, ...)
- Halbleiterindustrie (Mikroelektronikherstellung und -betrieb)
- Verfahrenstechnik (chemische Reaktoren, Wärmetauscher, Produktionsanlagen, ...)
- Maschinenbau (Aerodynamik, Strömungsakustik, Fluid-Struktur-Interaktionen, ...)
- Bauingenieurwesen (Wind/Wellenlasten auf gebaute Infrastruktur, Schadstoffausbreitung, ...)
- Biomechanik (Blutströmung, Atmung, Stoffkreislauf, ...)
- Astrophysik u.v.a.

Die intellektuelle Auseinandersetzung des menschlichen Geistes mit Strömungen geht sicherlich bis in das Altertum zurück. Obwohl die Anfänge dieser Auseinandersetzung oftmals im Kontext mit Heraklit von Ephesos (520–460 v. Chr.) und dem ihm zugeordneten Aphorismus πάντα ῥεῖ («Alles fließt» [1]) zitiert werden, handelt es sich dabei jedoch wohl eher um eine philosophische Reflektion über die stete Wandlung in der Welt als um einen gedanklichen Durchdringungsversuch der zugrundeliegenden physikalischen Aspekte von Strömungsphänomenen.

Im fünfzehnten Jahrhundert hat sich Leonardo da Vinci intensiv mit dem Element Wasser beschäftigt. Dies begann mit seinen bekannten Skizzen des heute als Turbulenz bekannten Phänomens (siehe beispielsweise Abbildung 1) und seinen dazu überlieferten Anmerkungen *“Observe the motion of the surface of the water, how it resembles that of hair, which has two motions, one depends on the weight*

* Der Vortrag wurde am 12.04.2013 vor der Klasse für Ingenieurwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

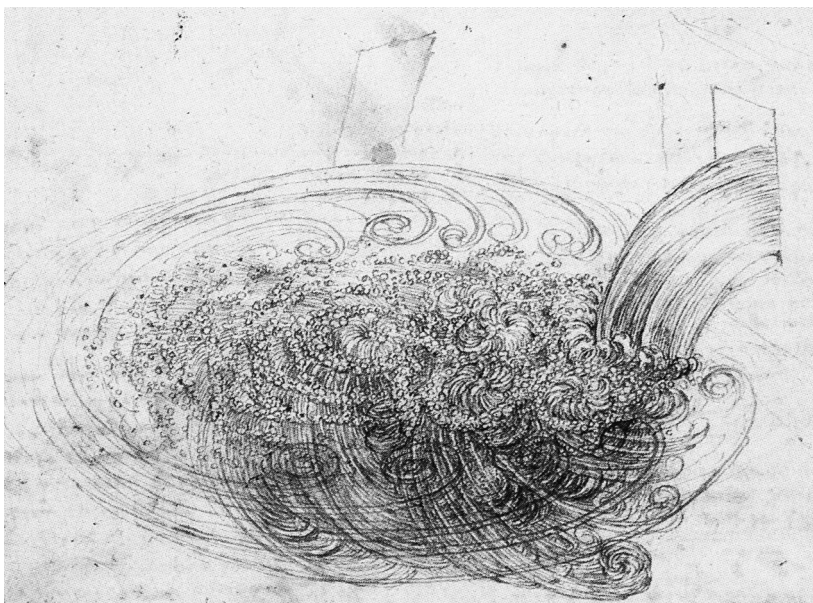


Abb. 1: Leonardo da Vinci (1452–1519), „Study of water falling into still water,“ c. 1508–9.

of the hair; the other on the direction of the curls; thus the water forms whirling eddies, one part following the impetus of the chief current, and the other following the incidental motion and return flow.“ und reichte bis zum Entwurf von wassergetriebenen Maschinen (siehe Abbildung 2).

Heute ist wissenschaftlicher Konsens, dass sich das Phänomen der Strömungsturbulenz *im Prinzip* durch die Lösungen der Impulsgleichungen von Navier und Stokes

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)(\rho\vec{v}) = -\nabla p + \mu\Delta(\rho\vec{v})$$

welche diese unabhängig 1845 bzw. 1827 hergeleitet hatten, in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0$$

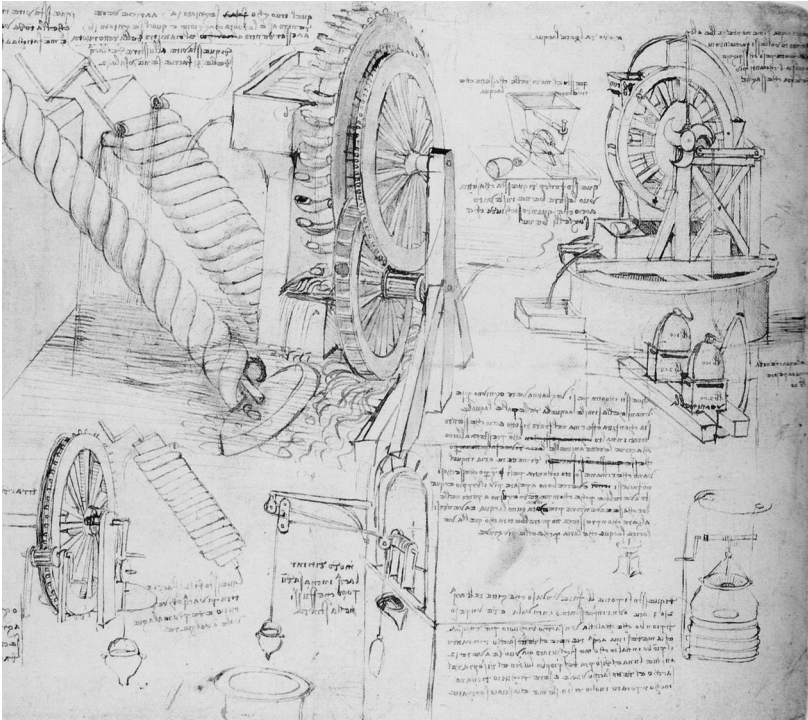


Abb. 2: Leonardo Da Vinci – Entwurf einer Wasserhebeeinrichtung, 1480. (Biblioteca Ambrosiana, Mailand, Italien)

welche die Massenerhaltung charakterisiert, beschreiben lässt. Dabei charakterisiert \vec{v} das (gesuchte) raumzeitlich veränderliche Strömungsfeld, ρ die Dichte des Fluids und p das zu \vec{v} passende Druckfeld, welches im inkompressiblen Fall durch Lösung der Poisson-Gleichung und im kompressiblen Fall durch Berücksichtigung der Energiegleichung in Verbindung mit der dem Problem angepassten thermodynamischen Zustandsgleichung ermittelbar ist. Als weitere Materialgröße geht neben der Dichte die dynamische Zähigkeit μ ein. Leider ist bisher aus mathematischer Sicht noch immer nicht zweifelsfrei geklärt, ob für die o.a. partiellen Differentialgleichungen für sinnvolle Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung existiert [7]. Daraus folgt natürlich auch, dass wir bisher insbesondere für turbulente Strömungen keine allgemein gültigen analytischen Lösungen kennen, sondern typischerweise gezwungen sind, mit numerischen Methoden Näherungslösungen für die Modellgleichungen zu finden, die es experimentell zu validieren gilt. Leider kann man zeigen, dass der Berechnungsaufwand für solche Näherungslösungen im wesentlichen kubisch mit der Referenzbezugsgröße, der

Bezugsgeschwindigkeit und dem Kehrwert der Viskosität wächst, weswegen für praxisrelevante Strömungsprobleme, die von Turbulenz geprägt sind, eine hinreichend genaue Berechnung numerischer Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen mit vorhandenen Rechnerkapazitäten in angemessener Zeit nicht möglich ist.

Eine wesentliche Eigenschaft turbulenter Strömungen ist die Existenz dynamischer Strukturen über einen großen Bereich von Längen- und Zeitskalen, die aus physikalischer Sicht den immensen Aufwand für entsprechende numerische Lösungen plausibilisieren. Für die Analyse und Prognose anwendungsrelevanter turbulenter Strömungen ist es jedoch meist nicht von Interesse, das Lösungsverhalten auf den kleinsten Skalen zu kennen, da ein Großteil der kinetischen Energie in den mittleren und größeren Skalen enthalten ist. Es stellt sich also die Frage, wie man zu Modellgleichungen kommt, die die impliziten Auswirkungen der kleinskaligen Strömungsdynamik auf technisch relevante Skalen konsistent beschreiben, ohne die Effekte auf den kleinsten Skalen explizit beschreiben zu müssen. Dieses Problem ist die Aufgabe der Turbulenzmodellierung. Typischerweise wird dazu das unbekannte Strömungsfeld hypothetisch in einen raumzeitlichen Mittelwert und fluktuierende Anteile zerlegt. Setzt man eine solche Zerlegung in die Navier-Stokes Gleichungen ein, resultieren wieder strukturell ähnliche Terme für die Mittelwerte, die jedoch durch nichtlineare Terme von Mittelwerten der Produkte von Komponenten der Fluktuationen, den sog. Reynoldsspannungen, ergänzt werden. Für eine Schließung des Problems müssen daher Annahmen getroffen werden, wie diese Komponenten der Reynoldsspannungen von den gemittelten Größen abhängen. Ein noch heute weitverbreiteter Ansatz basiert auf Arbeiten von Boussinesq [8], bei dem Turbulenz durch zusätzlichen dynamische Effekte charakterisiert wird, die sich als einer der materiellen Zähigkeit des Fluides überlagernden zusätzlichen turbulenten Scheinzähigkeit interpretieren lassen. Diese sog. turbulente oder Wirbelviskosität wird in vielen unterschiedlichen Varianten als Funktion der raumzeitlich gemittelten Strömungsfelder modelliert und erlaubt somit eine numerische Lösung der entsprechenden Transportgleichungen für die mittleren und größeren Skalen des Strömungsfeldes. Solche Modelle werden meist auch als Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) Ansätze bezeichnet.

Komplementär dazu verfolgen sog. Grobstrukturmodelle (Large Eddy Simulation, LES [9]) die Idee, das gesuchte Strömungsfeld formal einer räumlichen Filteroperation zu unterziehen, die glättende Eigenschaften hat. Das Einsetzen der gefilterten Funktion in die Navier-Stokes-Gleichungen resultiert wieder in fast identischen Gleichungen für die gefilterten Größen, welche jedoch von nichtlinearen ungefilterten Termen ergänzt werden. Da diese unbekannt sind, müssen sie wieder als Funktion gefilterter Größen modelliert werden, was zu einer Vielzahl von LES-Modellen führt. Eine vertiefte Übersicht über aktuelle RANS und LES Ansätze findet sich z.B. in [10]. Tendenziell lässt sich sagen, dass RANS-Modelle aufwändiger durch experimentelle Validierungen zu kalibrieren sind, dafür aber deutlich weniger rechenaufwändig sind, weswegen sie sich de facto zu einem

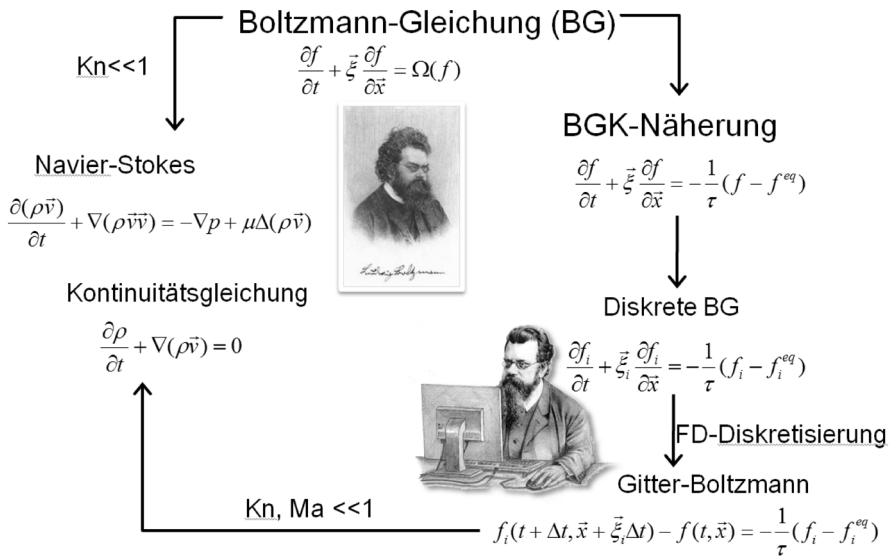


Abb. 3: Ableitung der Navier-Stokes-Gleichung aus der Boltzmann-Gleichung.

Industriestandard entwickelt haben. In den letzten Jahren gewinnen jedoch auch zunehmend LES-Simulationen an Bedeutung, die jedoch grundsätzlich dreidimensionale und zeitabhängige Berechnungen mit entsprechend deutlich höheren Rechenzeiten erfordern.

Ein in den letzten zwanzig Jahren entwickelter Ansatz zur Modellierung und Simulation von Transportphänomenen basiert auf einer vereinfachten Boltzmann-Gleichung. Es kann gezeigt werden, dass die Momente niederer Ordnung der Lösung solcher reduzierter Boltzmann-Gleichungen im Limes kleiner Knudsen- und Machzahlen auch Lösungen der entsprechenden inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen darstellen, wie in Abbildung 3 dargestellt ist.

Im Gegensatz zu den Navier-Stokes-Gleichungen besitzt die Gitter-Boltzmann-Gleichung einen linearen Advektionsterm, was die numerische Lösungsstrategie deutlich vereinfacht. Es zeigt sich, dass die hierfür zur Verfügung stehenden numerischen Verfahren sehr gut für die heute verfügbaren parallelen Rechnerarchitekturen geeignet sind, von denen insbesondere sog. General Purpose Graphics Processing Units, (GPGPUs) im Fokus stehen. Diese Architekturen dienen nicht mehr vorrangig der Berechnung von Visualisierungen (i.e. Bildschirmdarstellungen), sondern nehmen die Funktion numerischer Co-Prozessoren ein. Solche GPGPUs bestehen ihrerseits aus hunderten von sogenannten Kernen, auf denen ein Gesamtproblem parallel bearbeitet werden kann.

Entsprechend dem oben skizzierten Vorgehen können nun auch auf Basis der Gitter-Boltzmann Methode entsprechende Turbulenzmodelle realisiert werden. Nachfolgend dazu sei ein Berechnungsbeispiel angeführt, welches im Detail in [11] beschrieben ist. Für einen Querschnitt der Østbroen-Brücke (Abb. 6: Validierung der Druckverteilung auf der Ober- und Unterseite des Profils (Linie: num. Simulation, Symbole: Windkanalmessungen).) wurde eine LES-Simulation

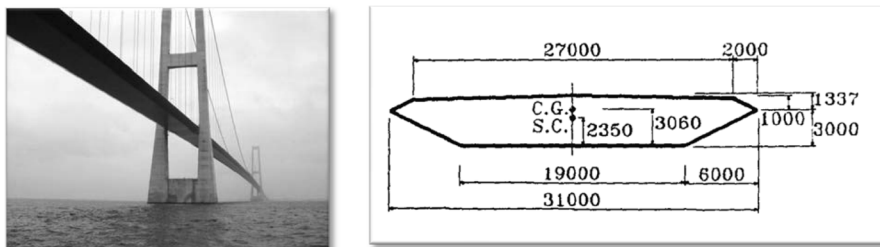


Abb. 4: Die Østbroen-Brücke überquert den Großen Belt, rechts ein Brückenquerschnitt.

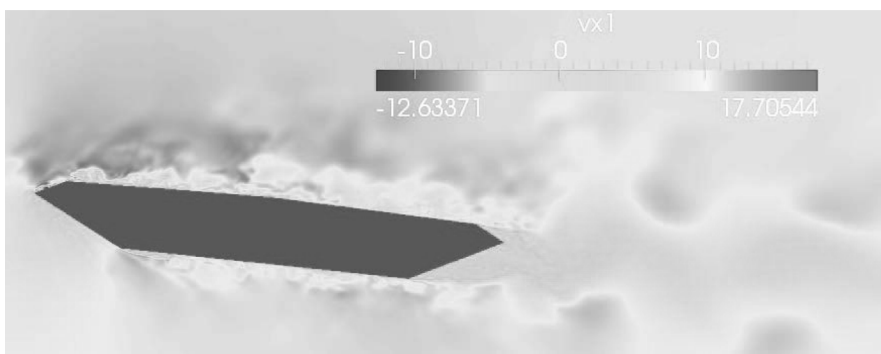


Abb. 5: Dreidimensionale LES-Simulation um den Brückenquerschnitt mit mehr als einer Milliarde Unbekannten.

durchgeführt (Abbildung 5), deren Druckverteilung über dem Querschnitt experimentell validiert wurde (Abb. 6: Validierung der Druckverteilung auf der Ober- und Unterseite des Profils (Linie: num. Simulation, Symbole: Windkanalmessungen).). Die Berechnungszeiten für dieses Beispiel liegen bei rund vier Tagen unter Nutzung von ca. zweihundert Prozessoren. Es ist davon auszugehen, dass die Nutzung von GPGPUs diese Rechenzeit auf wenige Stunden zu reduzieren erlaubt. Da

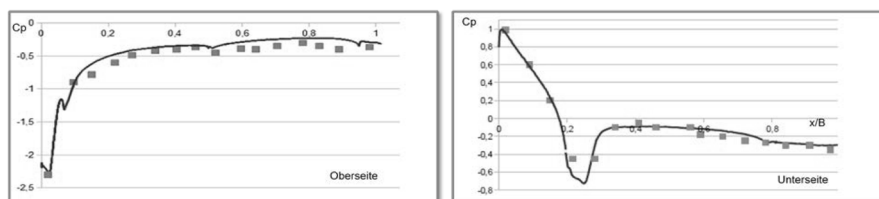


Abb. 6: Validierung der Druckverteilung auf der Ober- und Unterseite des Profils (Linie: num. Simulation, Symbole: Windkanalmessungen).

mit dieser Architektur nach den Erfahrungen in der Arbeitsgruppe des Autors in Bezug auf Anschaffungspreis und Unterhaltskosten eine Effizienzsteigerung von mindestens einer Größenordnung in Bezug auf konventionelle CPU-basierte Systeme möglich ist, macht insbesondere das günstige Preis-Leistungsverhältnis GPU-basierter Systeme diese für einen breiten Kreis von Industrieanwendern interessant, da somit erstmalig die Durchführung von sehr aufwändigen Turbulenzsimulationen möglich ist, ohne massiv in entsprechende Hardware und Systemadministration für einen Parallelrechner investieren zu müssen. Voraussetzung zur Nutzung GPU-basierter Simulationen ist allerdings eine Anpassung der problemspezifischen Berechnungsverfahren an die GPU-spezifische Speicher- und Prozessstruktur. Dies gilt natürlich auch für die entsprechenden numerischen Verfahren zur Simulation turbulenter Strömungen.

Zusammenfassung und Ausblick

Auch nach mehr als einhundert Jahren ist die Suche nach einem universell einsetzbaren und robusten Modell für Turbulenz noch nicht abgeschlossen, jedoch existieren zahlreiche Modellvarianten, die für unterschiedliche Klassen und Konfigurationen von turbulenten Strömungsproblemen jeweils optimiert wurden. Dies setzt offensichtlich bei Anwendungsfällen eine große Sachkenntnis der entsprechenden Akteure voraus. Über die komplexen Fragen der Modellierung hinausgehend ist jedoch im Sinne der Minimierung der Problemlösungszeit von Simulationaufgaben heutzutage die Kombination von physikalisch-mathematischem Modell, einer diesem angepassten numerischen Methodik und entsprechend der einzusetzenden Rechnerarchitektur angepassten Algorithmik von großer Bedeutung. Dieses Wechselspiel erfordert die enge Zusammenarbeit von Spezialisten aus den jeweiligen Disziplinen, aber auch die Ausbildung von Generalisten, die zumindest ein gutes Übersichtswissen dieser Disziplinen besitzen. Ein solches Ziel wird beispielsweise in der universitären Ausbildung entsprechend fokussierter Master-Studiengänge im Bereich des Computational Engineering verfolgt.

Literatur

- [1] http://de.wikipedia.org/wiki/Panta_rhei
- [2] SCHÖNHERR, M., M. GEIER & M. KRAFCZYK 2011: 3D GPGPU LBM implementation on non-uniform grids. International Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics.
- [3] TÖLKE, J. & M. KRAFCZYK 2008: 'TeraFLOP computing on a desktop PC with GPUs for 3D CFD', International Journal of Computational Fluid Dynamics, **22**:7, 443–456.
- [4] http://www.nvidia.de/object/cuda_home_new_de.html
- [5] Codex Atlanticus, 185v
- [6] Codex Atlanticus, f. 26v
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_existence_and_smoothness
- [8] BOUSSINESQ, JOSEPH VALENTIN 1897: Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section (vol.1), Gauthier-Villars.
- [9] SMAGORINSKY, JOSEPH 1963: "General Circulation Experiments with the Primitive Equations". Monthly Weather Review **91**(3): 99–164.
- [10] FRÖHLICH, J. & D. VON TERZI 2008: Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows, Progress in Aerospace Sciences, Volume **44**, Issue 5, Pages 349–377, ISSN 0376-0421, <http://dx.doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.05.001>. (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042108000390>)
- [11] UPHOFF S. 2013: "Development and Validation of turbulence models for Lattice Boltzmann schemes" Dissertation, TU Braunschweig.